微积分A(2)期末复习笔记，仅供参考。 PDF版本链接

网页较大预警。如果公式解析不正确请刷新页面。长时间加载不出来建议打开PDF用Ctrl+S键下载到本地。流量访问请谨慎。

多元函数定义

内积：$x, y \in \mathbb{R}^n$，$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

范数：$\forall N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.t.: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$，

1. $N(x) \geq 0$且$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

> **n维空间范数等价性**:
> N, M为$\mathbb{R}^n$中任意两个范数，$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s.t.: $\forall x \in \mathbb{R}^n$，
>
> $$\alpha M(x) \leq N(x) \leq \beta M(x)$$
>
> 因此通常只考虑2-范数：$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

> **三角不等式**:
>
> $$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

> **Cauchy-Schwarz不等式**:
>
> $$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

距离：$x, y \in \mathbb{R}^n, \Omega, \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$，

1. $\text{dis}(x, y) = \|x - y\|$
2. $\text{dis}(\Omega, y) = \inf \left\{ \|x - y\| \middle| x \in \Omega \right\}$
3. $\text{dis}(\Omega, \Lambda) = \inf \left\{ \|x - y\| \middle| x \in \Omega, y \in \Lambda \right\}$

直径：$\text{diam}(\Omega) = \sup \left\{ \|x - y\| \middle| x, y \in \Omega \right\}$.

邻域：$x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta \in \mathbb{R}$，

1. $B(x_0, \delta) = \{x | \text{dis}(x, x_0) < \delta\}$.
2. $B_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < \text{dis}(x, x_0) < \delta\}$.

补集：$\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

内点：$\exists \delta > 0, B(x_0, \delta) \subseteq \Omega$，则$x_0 \in \Omega_0$.

外点：$\exists \delta > 0, B(x_0, \delta) \bigcap \Omega = \varnothing$，则$x_0 \in \Omega_0^c = \overline{\Omega}$.

孤立点：$x_0 \in \Omega, \exists \delta > 0, B_0(x_0, \delta) = \varnothing$，则$x_0$为孤立点.

边界点：$\forall \delta > 0, B(x_0, \delta) \bigcap \Omega \neq \varnothing$ and $B(x_0, \delta) \bigcap \Omega \neq B(x_0, \delta)$，则$x_0$为边界点.

聚点：$\forall \delta > 0, B(x_0, \delta) \bigcap \Omega \neq \varnothing$，则$x_0 \in \Omega'$.

闭包：$\mathrm{Cl}(\Omega) = \Omega' \bigcup \Omega$.

> x为非聚点，$x \notin \Omega$，则x为外点.
> x为非聚点，$x \in \Omega$，则x为孤立点.

开集：Ω s.t.: $\Omega = \Omega_0$.

闭集：Ω s.t.: $\Omega = \overline{\Omega}$.

有界集：Ω s.t.: $\exists r > 0, \Omega \subseteq B(0, r)$.

> $\mathbb{R}^n$与$\varnothing$既开又闭.
> 开集的并是开集，有限个开集的交是开集.
> 闭集的交是闭集，有限个闭集的并是闭集.

点列收敛：$\{x_i\}$为$\mathbb{R}^n$中点列，若$\lim_{i\to\infty} \|x_i - x_0\| = 0$，则$\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$.

> 收敛点列极限唯一.

Cauchy列(基本列)：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall l, k \in \mathbb{N}_+, l, k > 0$，$\|x_k - x_l\| < \varepsilon$.

> 基本列 $\Leftrightarrow$ 收敛.

> Ω为闭集，$\{x_i\} \subseteq \Omega$而$\lim_{i\to\infty} x_i$存在，则$\lim_{i\to\infty} x_i \in \Omega$. 特别地，因为$\mathbb{R}^n$为闭集，所以$\mathbb{R}^n$具有完备性.

连通集：$\forall x, y \in \Omega$，$\exists \varphi_i \in \mathscr{C}[a, b]$，$\varphi_i(a) = x^{(i)}, \varphi_i(b) = y^{(i)}$. 连通非空开集为**开区域**，开区域闭包为**闭区域**.

二元函数：$f : \Omega \to \mathbb{R}$ s.t.: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \Omega, \exists! z \in \mathbb{R}, z = f(x, y)$.

二元函数极限与连续

二重极限：$p_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$为聚点，二元函数$f$定义在$B_0(p_0, \delta_0) \bigcap \Omega$上，若$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta < \delta_0, p \in B_0(p_0, \delta_0) \bigcap \Omega$，都有：$|f(p) - A| < \varepsilon$，则$\lim_{\substack{p\to p_0 \\ p\in\Omega}} = A$. 若$p_0$为$\Omega$内点，则可简记为$\lim_{p\to p_0} f(p) = \lim_{\|p-p_0\|\to 0} f(p) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$.

> 若二重极限存在，则任意路径趋近于p_0，极限值相同.

累次极限：$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y)$与$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y)$.

> 若二重极限和累次极限均存在，则相等.
> 若累次极限不相等，则二重极限不存在.

连续：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall p \in B(p_0, \delta) \bigcap D(f)$，都有$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$，则$f$在$p_0$处连续.
否则f在p_0处间断，p_0为f**间断点**. $\lim_{p\to p_0} f(p)$存在但不等于$f(p_0)$则为**可去间断点**，不存在则为**本性间断点**.

> f在p_0二重极限存在，则f在p_0处连续.
> 若p_0为$D(f)$聚点，f在p_0处连续 $\Leftrightarrow$ f在p_0二重极限为$f(p_0)$.

> 若p_0为$D(f)$孤立点，f在p_0处必连续.
> 若p_0为f间断点，p_0必为$D(f)$聚点.
> 若p_0处f连续，则一元函数$f(x,y_0)$与$f(x_0,y)$在(x_0,y_0)处连续.

若f在开集D上连续或在闭集D内部和边界点上连续，则$f\in\mathscr{C}(D)$.

> f在连通集D上连续，则f在D上最值存在.

二元函数导数

偏导数:

$$
\begin{aligned}
f'_x(p_0) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\\
f'_y(p_0) &= \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}
\end{aligned}
$$

全微分:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(p_0) &= f'_x(p_0)\Delta x + f'_y(p_0)\Delta y + \underbrace{o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}_{o(\rho)}\\
\mathrm{d}f(p_0) &= f'_x(p_0)\,\mathrm{d}x + f'_y(p_0)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

> 可微 $\Rightarrow$ 连续，偏导存在
> 偏导连续 $\Rightarrow$ 可微

> **可微的充要条件**:
>
> $$\lim_{p\to p_0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)-f'_x(p_0)\Delta x-f'_y(p_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

> **复合函数求导**:
> 若$z=f(x,y)=f(x(t,s),y(t,s))$:
>
> $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial z}{\partial s}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\end{aligned}$$

高阶偏导数:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(p_0) &= \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_x(x_0+\Delta x,y_0)-f'_x(x_0,y_0)}{\Delta x}\\
f''_{xy}(p_0) &= \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0,y_0)}{\Delta y}\\
f''_{yx}(p_0) &= \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(x_0+\Delta x,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{\Delta x}\\
f''_{yy}(p_0) &= \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_y(x_0,y_0+\Delta y)-f'_y(x_0,y_0)}{\Delta y}
\end{aligned}
$$

> 若f''_{xy},f''_{yx}在p_0处连续，则$f''_{xy}(p_0)=f''_{yx}(p_0)$.

方向导数：对于$e \in \mathbb{R}^2, \|e\| = 1$，可定义：

$$f'_e(p_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{p_0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(p_0 + te) - f(p_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}[f(p_0 + te)]}{\mathrm{d}t}$$

注意到上式中e仅指代射线方向，即$\forall \lambda > 0$：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial (\lambda e)}\right|_{p_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{p_0}$$

> 可微 $\Rightarrow$ 方向导数存在.
> 方向导数存在且同一点处反方向导数为正方向导数相反数 $\Rightarrow$ 偏导数存在.
>
> $$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial (-e)}\right|_{p_0} &= -\left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{p_0} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}\right|_{p_0} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p_0} \qquad \text{if } \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}\right|_{p_0} = -\left.\frac{\partial f}{\partial (-\vec{i})}\right|_{p_0} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}\right|_{p_0} &= \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{p_0} \qquad \text{if } \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}\right|_{p_0} = -\left.\frac{\partial f}{\partial (-\vec{j})}\right|_{p_0} \end{aligned}$$

梯度：

$$\nabla f(p_0) = \mathrm{grad} f(p_0) = (f'_x(p_0), f'_y(p_0))$$

> $$\left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{p_0} = \nabla f(p_0) \cdot e = \|\nabla f(p_0)\| \cos\langle \nabla f(p_0), e \rangle$$

向量值函数与隐函数

向量值函数：$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ s.t.：$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \forall \vec{x} \in \Omega, \exists! \vec{y} \in \mathbb{R}^m, \vec{y} = f(\vec{x})$.

连续：$f \in \mathscr{C}(\Omega) \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, f_i \in \mathscr{C}(\Omega_i)$.

映射微分：

$$\begin{aligned} \Delta f(\vec{x}) &= A\vec{\Delta x} + \underbrace{o\left(\|\vec{\Delta x}\|\right)}_{o(\rho)} \\ \mathrm{d}f(\vec{x}) &= A\mathrm{d}\vec{x} \end{aligned}$$

其中$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$，满足：

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_{p_0}$$

称A为f的Jacobi矩阵，记作$Jf(\vec{x}_0) = \left.\frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right|_{\vec{x}_0} = A$.
$\Phi(\vec{x}_0)(\vec{x}) = Jf(\vec{x}_0) \times \vec{x}$为$f$在$\vec{x}_0$的微分映射.
$\mathrm{d}f(\vec{x}) = Jf(\vec{x}_0) \times \mathrm{d}\vec{x}$为$f$在$\vec{x}_0$的微分.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \cdots \\ \mathrm{d}y_m \end{bmatrix} = \frac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} \times \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \cdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix}$$

复合映射微分:
若向量值函数f在$\vec{x}_0$处可微，g在$\vec{u}_0 = f(\vec{x}_0)$处可微，$\mathrm{Im}(f) \subseteq D(g)$. 则:

$$J(g \circ f)(\vec{x}_0) = Jg(\vec{u}_0) \times Jf(\vec{x}_0)$$

逆映射微分:

$$J(f \circ f^{-1}) = I_{n\times n}$$
$$Jf^{-1}(\vec{y}) = (Jf(\vec{x}))^{-1}$$

隐函数: $D(F) = W \times E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\forall \vec{x} \in W, \exists! y \in E$ s.t.: $F(\vec{x}, y) = 0$. 则$F(\vec{x}, y) = 0$确定隐函数$y = f(\vec{x})$.

隐函数存在性:
若F在W内有定义，且:

1. $F \in \mathscr{C}^{(q)}$, $q \geq 1$.
2. $\exists \vec{p}_0 \in W \times E, F(\vec{p}_0) = 0$.
3. $F'_y(\vec{p}_0) \neq 0$.

则: $\exists I \times J \subseteq W \times E$ s.t.: $\vec{x}_0 \in I, y_0 \in J$ (i.e.: $\vec{p}_0$的邻域):

1. $\forall \vec{x} \in I$, $\exists! y = f(\vec{x}) \in J$. (隐函数存在唯一性)
2. $y_0 = f(\vec{x}_0)$. (初值条件)
3. $f \in \mathscr{C}^{(q)}(I)$. (隐函数连续性)
4. $\forall \vec{x} \in I$,

$$f'_j(\vec{x}) = -\frac{F'_j(\vec{p})}{F'_y(\vec{p})}$$

(隐函数导数)

若二元函数$F(x, y) = 0$确定隐函数$f(x)$, $f^{-1} = g$存在 $\Leftrightarrow$ $F(x, y) = 0$确定隐函数$g(y)$.

隐函数方程组: $\forall 1 \leq i \leq m, F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0$, 其中$D(F_i) = W_x \times W_y$.

隐函数方程组解存在性:
若F在W_x内有定义，且: $\forall 1 \leq i \leq m$,

1. $F \in \mathscr{C}^{(q)}$, $q \geq 1$.
2. $\exists p_0 \in W_x \times W_y, F_i(\vec{p}_0) = 0$.
3. $\left.\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|_{\vec{p}_0}$ 可逆.

则: $\exists \vec{p}_0$的邻域$I_x \times I_y$: $\forall 1 \leq i \leq m$,

1. $\forall \vec{x} \in I_x, \exists! \vec{y}$ s.t.: $F_i(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. 可以相应定义定义$y_i = (\vec{y})_i = f_i(\vec{x})$.
2. $(\vec{y}_0)_i = f_i(\vec{x}_0)$.
3. $f_i \in \mathscr{C}^{(q)}(I_x)$.
4. $\forall \vec{x} \in I_x$,

$$\left.\frac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{\vec{x}} = -\left(\left.\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|_{\vec{p}}\right)^{-1} \times \left.\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{\vec{x}}$$

空间曲线和曲面

空间曲线切向量：$\vec{p}=t\vec{\tau}$，其中切向量$\vec{\tau}=(x_t',y_t',z_t')(\vec{p}_0)$．若空间曲线处处有非零、连续的切向量，则称空间曲线光滑．

空间曲面切向量与法向量：曲面$S:F(\vec{p})=0$在$\vec{p}_0$处可微，且$\nabla F(\vec{p}_0)\neq 0$，$F$在邻域内连续，则：

$$\forall\vec{\tau},F'(t_0)=\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0$$

其中法向量$\vec{n}=\nabla F(\vec{p}_0)=(F_x',F_y',F_z')(\vec{p}_0)$，切向量$\vec{\tau}=(x_t',y_t',z_t')(\vec{p}_0)$对于任意曲线$l:x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ s.t: $\vec{p}_0\in l\subseteq S$.

切向量求切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\tau_x}=\frac{y-y_0}{\tau_y}=\frac{z-z_0}{\tau_z}$$

法向量求法线方程：

$$\frac{x-x_0}{n_x}=\frac{y-y_0}{n_y}=\frac{z-z_0}{n_z}$$

切向量求法平面方程：

$$\tau_x(x-x_0)+\tau_y(y-y_0)+\tau_z(z-z_0)=0$$

法向量求切平面方程：

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0$$

切向量求法向量(法向量求切向量类似)：

$$\vec{n}=\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\tau_{1x}&\tau_{1y}&\tau_{1z}\\\tau_{2x}&\tau_{2y}&\tau_{2z}\end{vmatrix}=\left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

显函数法向量：$\vec{n}=(f_x',f_y',-1)(p_0)$.

二元函数泰勒展开与极值

高阶全微分：若$f\in\mathscr{C}^{(n)}$，

$$\mathrm{d}^nf=\left(\mathrm{d}x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x,y)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\frac{\partial^nf}{\partial x^i\partial y^{n-i}}(x,y)\cdot\mathrm{d}x^i\cdot\mathrm{d}y^{n-i}$$

二元函数泰勒展开：若$f\in\mathscr{C}^{(n)}$，

$$T_f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left((x-x_0)\cdot\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^kf(x_0,y_0)$$
$$f(x,y)=T_f(x,y)+R_n$$

皮亚诺余项：$f\in\mathscr{C}^{(n)}$，$R_n=o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^{\,n}\right)$.

拉格朗日余项：$f\in\mathscr{C}^{(n+1)}$，$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$，$\theta\in[0,1]$.

> e.g.: $n=2$
>
> $$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)\\&+(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''_{xx}(x_0,y_0)+(x-x_0)(y-y_0)f''_{xy}(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(y-y_0)^2f''_{yy}(x_0,y_0)\\&+R_2\end{aligned}$$

二元函数微分中值定理：$f\in\mathscr{C}$，$\theta\in[0,1]$，

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\left(\Delta x f'_x+\Delta y f'_y\right)(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$$

二元函数极值：$B(p_0,\delta)\subseteq D(f)$，若$\forall p\in B(p_0,\delta),f(p)\le f(p_0)$，则$p_0$为极大值点，$f(p_0)$为极大值．极小值点和极小值同理．

> 极值点 $\Rightarrow$ 内点.
> 极值点，偏导存在 $\Rightarrow$ 驻点(临界点).

> p_0为f驻点，$f\in\mathscr{C}^{(2)}(B(p_0,\delta_0))$:
>
> - $f''_{xx}f''_{yy}-{f''_{xy}}^2>0$，$p_0$为极值点
>   - $f''_{xx}>0,f''_{yy}>0$，p_0为极小值点.
>   - $f''_{xx}<0,f''_{yy}<0$，p_0为极大值点.
> - $f''_{xx}f''_{yy}-{f''_{xy}}^2<0$，$p_0$不为极值点
> - $f''_{xx}f''_{yy}-{f''_{xy}}^2=0$，无法确定
>   - 若$\exists 0<\delta<\delta_0,\forall p\in B(p_0,\delta)$，$f''_{xx}f''_{yy}-{f''_{xy}}^2\ge 0$，则为极值点，按照第一条方式判断.
>
> 一般地，对于n原函数，判断Hessian矩阵$H_f(p_0)$:
>
> $$\begin{bmatrix}f''_{x_1x_1}&f''_{x_1x_2}&f''_{x_1x_3}&\cdots&f''_{x_1x_n}\\f''_{x_2x_1}&f''_{x_2x_2}&f''_{x_2x_3}&\cdots&f''_{x_2x_n}\\f''_{x_3x_1}&f''_{x_3x_2}&f''_{x_3x_3}&\cdots&f''_{x_3x_n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f''_{x_nx_1}&f''_{x_nx_2}&f''_{x_nx_3}&\cdots&f''_{x_nx_n}\end{bmatrix}$$
>
> 若正定或在邻域内连续半正定，则为极小值点；若负定或在邻域内连续半负定，则为极大值点.

最小二乘法求回归直线:

$$\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^2&\sum_{i=1}^n x_i\\\sum_{i=1}^n x_i&n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_iy_i\\\sum_{i=1}^n y_i\end{bmatrix}=\frac{1}{\mathrm{Var}[x]}\begin{bmatrix}1&-\mathbb{E}[x]\\-\mathbb{E}[x]&\mathbb{E}[x^2]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_iy_i\\\sum_{i=1}^n y_i\end{bmatrix}$$

拉格朗日乘子法求条件极值：求$f(x,y)$在$\varphi(x,y)=0$条件下的极值，可构造拉格朗日函数并求解其驻点:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

含参定积分

一致连续：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall p_1,p_2\in\Omega,\|p_1-p_2\|<\delta$，都有$|f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon$，则$f$在$\Omega$上一致连续.

> 有界闭集上连续则一致连续.

含参定积分：I为任意区间，$D=[a,b]\times I\subseteq D(f)$，若$\forall u\in I$，$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\ \mathrm{d}x$存在，则称其为$f$含参$u$的定积分.

> **连续性**：$f\in\mathscr{C}(D)\ \Rightarrow\ \varphi\in\mathscr{C}(I)$，即：
>
> $$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\ \mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\ \mathrm{d}x=\varphi(u_0)$$
>
> **可导性**：$f'_u\in\mathscr{C}(D)\ \Rightarrow\ \varphi'$存在且：
>
> $$\varphi'(u)=\int_a^b f'_u(x,u)\ \mathrm{d}x$$
>
> **可积性**：$f\in\mathscr{C}(D)\ \Rightarrow\ \varphi\in\mathscr{R}(I)$且：
>
> $$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\ \mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,u)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}u=\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,u)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}x$$
>
> **变限积分**：$f'_u\in\mathscr{C}(D)$，$a(u),b(u)\in\mathscr{C}[a,b]$在$[\alpha,\beta]$上可导 $\Rightarrow$ φ'在$[\alpha,\beta]$上存在且：
>
> $$\varphi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f'_u(x,u)\ \mathrm{d}x+b'(u)\cdot f(b(u),u)-a'(u)\cdot f(a(u),u)$$

含参广义积分：I为任意区间，$D=[a,+\infty)\times I\subseteq D(f)$，若$\forall u\in I$，$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\ \mathrm{d}x$存在，则称其为$f$含参$u$的无穷积分.

一致收敛：$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>a,\forall A>A_0,u\in I$，都有$|\int_A^{+\infty}f(x,u)\ \mathrm{d}x|<\varepsilon$，则$\int_a^{+\infty}f(x,u)\ \mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.

> **一致收敛Cauchy原理**：
> $\int_a^{+\infty}f(x,u)\ \mathrm{d}x$在$I$上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists A_0>a,\forall A_1,A_2>A_0,u\in I$，都有$|\int_{A_1}^{A_2}f(x)\ \mathrm{d}x|<\varepsilon$.
>
> **Weierstrass判别法**：
> $D=[a,+\infty)\times I\subseteq D(f)$，$f\in\mathscr{C}[a,+\infty)$. 若$\exists F\in\mathscr{C}[a,+\infty)$ s.t: $\forall(x,u)\in D,f(x)\le F(x)$且$\int_a^{+\infty}F(x)\ \mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x,u)\ \mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.
>
> **积分第二中值定理**：
> $f,g\in\mathscr{C}([a,b]\times I),g'_x\in\mathscr{C}([a,b]\times I)$，若$g$关于$x$单调，则$\exists\xi\in(a,b)$ s.t.:
>
> $$\int_a^b f(x,u)g(x,u)\ \mathrm{d}x=g(a,u)\int_a^\xi f(x,u)\ \mathrm{d}x+g(b,u)\int_\xi^b f(x,u)\ \mathrm{d}x$$
>
> **Dirichlet判别法**：
> $f,g\in\mathscr{C}([a,b]\times I)$，若：
>
> 1. $\int_a^{+\infty}f(x,u)\ \mathrm{d}x$关于$u\in I$一致有界.
> 2. g关于x单调且关于$u\in I$一致趋于0.

> 则$\int_a^b f(x,u)g(x,u)\ \mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.
>
> **Abel判别法**:
> $f,g\in\mathscr{C}([a,b]\times I)$，若:
>
> 1. $\int_a^{+\infty} f(x,u)\ \mathrm{d}x$关于$u\in I$一致收敛.
> 2. g关于x单调且关于$u\in I$一致有界.
>
> 则$\int_a^b f(x,u)g(x,u)\ \mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.

局部一致收敛：$\forall u_0\in I,\delta>0$，若都有$\int_a^{+\infty} f(x,u)\ \mathrm{d}x$在$(u_0-\delta,u_0+\delta)\bigcap I$上一致收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x,u)\ \mathrm{d}x$在$I$上局部一致收敛.

> **连续性**：$f\in\mathscr{C}(D)$，$\varphi(u)$在I上局部一致收敛 $\Rightarrow$ $\varphi\in\mathscr{C}(I)$，即:
>
> $$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)\ \mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{u\to u_0} f(x,u)\ \mathrm{d}x=\varphi(u_0)$$
>
> **可导性**：$f_u'\in\mathscr{C}(D)$，$\varphi(u)$在I上一致收敛，$\int_a^{+\infty} f_u'(x,u)\ \mathrm{d}x$在$I$上局部一致收敛 $\Rightarrow$ φ'存在且:
>
> $$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty} f_u'(x,u)\ \mathrm{d}x$$
>
> **可积性**：$f\in\mathscr{C}(D)$，$\varphi(u)$在I上一致收敛 $\Rightarrow$ $\varphi\in\mathscr{R}(I)$且:
>
> $$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\ \mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\int_a^{+\infty} f(x,u)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\int_\alpha^\beta f(x,u)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}x$$

Gamma函数：$\Gamma(\alpha)\in\mathscr{C}^{(\infty)}(0,+\infty)$，

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

> $$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x\ \mathrm{d}x$$
>
> $$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$
>
> $$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
>
> $$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$
>
> $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}e^x}\ \mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$$

Beta函数：$\mathrm{B}(p,q)\in\mathscr{C}((0,+\infty)\times(0,+\infty))$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ \mathrm{d}x$$

> $$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$$
>
> $$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$$

> $$\mathrm{B}(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q)(p+q+1)}\mathrm{B}(p,q)$$
>
> $$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\frac{1}{qC_{p+q-1}^{p-1}}$$

多重积分

二重积分：$D\subseteq R^2$，T是D的一个分割，$|T|=\max_{1\leq i\leq n}\{\mathrm{diam}(\Delta D_i)\}$，其中$\Delta D_i$面积为$S(\Delta D_i)=\Delta a_i$，$(x_i,y_i)\in\Delta D_i$，则：

$$V=\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\cdot\Delta a_i=\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}S$$

若该极限值存在且对于不同的T一致，则f在D上可积，$f\in\mathscr{R}(D)$.

> $\iint_D 1\ \mathrm{d}a=S(D)$.
> $f\in\mathscr{R}(D)\ \Rightarrow\ f$在$D$上有界.
> $f\in\mathscr{R}(D)\ \Leftrightarrow$ 达布上和=达布下和 $\Leftrightarrow$ 振幅刻画$\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta a_i$.
> D为有界闭区域(或间断点集零面积且有界)，则$f\in\mathscr{C}(D)\ \Rightarrow\ f\in\mathscr{R}(D)$.

> 若$D=\bigcup_{i=1}^{m}D_i$，$\forall i\neq j,(D_i)_0\bigcap(D_j)_0=\varnothing$，则：
>
> $$\iint_D f\ \mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{m}\iint_{D_i}f\ \mathrm{d}S$$
>
> 且$f\in\mathscr{R}(D)\ \Leftrightarrow\ \forall i,f\in\mathscr{R}(D_i)$.

> $f\geq g\ \Rightarrow\ \iint_D f\ \mathrm{d}S\geq\iint_D g\ \mathrm{d}S$.
> $\left|\iint_D f\ \mathrm{d}S\right|\leq\iint_D|f|\ \mathrm{d}S$.

二重积分中值定理：$f\in\mathscr{C}(D),g\in\mathscr{R}(D)$，$g$在$D$上不变号，则$\exists(\xi,\eta)\in D$ `s.t.`:

$$\iint_D fg\ \mathrm{d}S=f(\xi,\eta)\cdot\iint_D g\ \mathrm{d}S$$

二重积分的计算：若$D=\{(x,y)|x\in[a,b],y_1(x)\leq y\leq y_2(x)\}$，其中$y_1,y_2\in\mathscr{C}[a,b]$且$y_1\leq y_2$恒成立．则：

$$\iint_D f\ \mathrm{d}S=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

$D=\{(x,y)|y\in[a,b],x_1(y)\leq x\leq x_2(y)\}$情况类似.
注意若$\varphi(x,y)=(u,v)$为连续可微双射，即$\forall(x,y)\in D,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$可逆，则：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left|\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

特别地，对于极坐标有：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\det\begin{bmatrix}\cos\theta&-\rho\sin\theta\\\sin\theta&\rho\cos\theta\end{bmatrix}\right|\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\rho\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

三维二重积分：面积微元$\mathrm{d}S$为：

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若曲面单位法向量为$\vec{n}=\frac{\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2}{\|\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2\|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则也可写作：

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若切向量具体为$\vec{\tau}_1=(x'_u,y'_u,z'_u),\vec{\tau}_2=(x'_v,y'_v,z'_v)$，则：

$$\begin{aligned}\vec{n}&=\det\begin{bmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x'_u&y'_u&z'_u\\x'_v&y'_v&z'_v\end{bmatrix}=\left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)=(A,B,C)\\\mathrm{d}S&=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\|\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Gauss系数：

$$\begin{aligned}E&=\|\vec{\tau}_1\|^2=(x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2\\F&=\|\vec{\tau}_2\|^2=(x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2\\G&=\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2=x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v\\\mathrm{d}S&=\sqrt{EF-G^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

三重积分的计算：三重积分与二重积分定义类似．特别地，三重积分可以转化为"先二后一"或"先一后二"的积分．

$$\iiint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{z_1}^{z_2}\iint_{D_z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

与二重积分类似有：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\left|\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|^{-1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

特别地，对于柱坐标系有：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\det\begin{bmatrix}\cos\theta&-\rho\sin\theta&0\\\sin\theta&\rho\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right|\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

对于球坐标系有($x=\rho\sin\varphi\cos\theta,y=\rho\sin\varphi\sin\theta,z=\rho\cos\varphi$)：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\det\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\theta&\rho\cos\varphi\cos\theta&-\rho\sin\varphi\sin\theta\\\sin\varphi\sin\theta&\rho\cos\varphi\sin\theta&\rho\sin\varphi\cos\theta\\\cos\varphi&-\rho\sin\varphi&0\end{bmatrix}\right|\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

物理量计算：

质量：

$$M=\iiint_V\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

质心(静力矩$/M$)：

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \dfrac{1}{M} \iiint_V x\rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \widetilde{y} = \dfrac{1}{M} \iiint_V y\rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \widetilde{z} = \dfrac{1}{M} \iiint_V z\rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{cases}$$

转动惯量：

$$I = \iiint_V \rho(x,y,z) \cdot r^2(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

引力：

$$\begin{cases} F_x = Gm_0 \iiint_V \dfrac{(x-x_0)\rho(x,y,z)}{r^3}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ F_y = Gm_0 \iiint_V \dfrac{(y-y_0)\rho(x,y,z)}{r^3}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ F_z = Gm_0 \iiint_V \dfrac{(z-z_0)\rho(x,y,z)}{r^3}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{cases}$$

曲线积分

第I型曲线积分：

$$\int_L f(x,y,z)\ \mathrm{d}\ell$$

其中：

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\ \mathrm{d}t$$

特别地，对于封闭曲线记为：

$$\oint_L f(x,y,z)\ \mathrm{d}\ell$$

> 第I型曲线积分不具有方向性：
>
> $$\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}\ell = \int_{\widehat{BA}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}\ell$$

> $f \geq g \ \Rightarrow\ \int_L f\ \mathrm{d}\ell \geq \iint_L g\ \mathrm{d}\ell$.
> $\left|\int_L f\ \mathrm{d}\ell\right| \leq \iint_L |f|\ \mathrm{d}\ell$.

第I型曲线积分中值定理：$f \in \mathscr{C}(L)$，$\exists (\xi,\eta,\zeta) \in L$ `s.t.`：

$$\iint_L f(x,y,z)\ \mathrm{d}\ell = f(\xi,\eta,\zeta) \cdot \ell$$

第II型曲线积分：$\vec{F}(x,y,z)=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$，$\vec{r}=\vec{\tau}\mathrm{d}\ell=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$，有时$\vec{\tau}$也写做$\vec{\ell}$.

$$\int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}\ell=\int_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$$

注意$\int_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z=\int_L X\ \mathrm{d}x+\int_L Y\ \mathrm{d}y+\int_L Z\ \mathrm{d}z$，其中的曲线积分$\int_L$不能直接等价于一重积分$\int$，因为另一变量在改变而非常数. $\int_L f(x,y)\ \mathrm{d}x$这种曲线积分在封闭情况下可以求解，参见下方"Green公式"与"Stokes公式"(另外，如果被积函数和另一变量无关也可以求解).

对于闭区域D的边界曲线$\partial D=L$，一般将其正方向定义为D内部在L左侧，记为L^+. 默认封闭曲线积分为沿正方向的积分.

> 若L为多条有向曲线段L_i首尾相接而成，则：
>
> $$\iint_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\ \mathrm{d}\ell=\sum_{i=1}^{m}\iint_{L_i}\vec{F}\cdot\vec{\tau}\ \mathrm{d}\ell$$
>
> 且$\vec{F}\cdot\vec{\tau}\in\mathscr{R}(L)\ \Leftrightarrow\ \forall i,\vec{F}\cdot\vec{\tau}\in\mathscr{R}(L_i)$.

> 第II型曲线积分具有方向性：
>
> $$\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int_{\overset{\frown}{BA}}\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$
>
> 事实上，$\int F\cdot\vec{\tau}\ \mathrm{d}\ell$也可看做是第I型曲线积分不具有方向性，但$\vec{F}\cdot(-\vec{\tau})=-\vec{F}\cdot\vec{\tau}$，故第II型曲线积分具有方向性.

> **Green公式**:
> $D\subseteq\mathbb{R}^2$，$P,Q\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$，$\partial D=L$光滑或分段光滑，则：
>
> $$\oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\det\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\P&Q\end{bmatrix}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
>
> 更进一步，事实上有：
>
> $$\oint_{L^+}P\mathrm{d}x=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
> $$\oint_{L^+}Q\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
>
> 注意到如果构造P,Q使得$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=C$为非零常数，则可用于求出$D$区域的面积. 例如：
>
> $$S(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D^+}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
>
> 另外，分别考虑曲线在平面内的切向量和$\vec{\tau}$和朝向区域外侧的单位法向量$\vec{n}$，Green公式也可写作：
>
> $$\oint_{L^+}(P,Q)\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}\ell=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
> $$\oint_{L^+}(P,Q)\cdot\vec{n}\mathrm{d}\ell=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

路径无关积分:
$D\subseteq\mathbb{R}^2$，$P,Q\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$，$L$光滑或分段光滑，则以下命题等价：

1. $\int_{L(A,B)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$路径无关.
2. $\exists U$ s.t.: $\forall(x,y)\in D,\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 即:

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

3. $\forall(x,y)\in D$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$.
4. $\forall L\subseteq D$，若L为光滑或分段光滑封闭曲线，则$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

全微分方程：若$\exists U,\mathrm{d}U(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则方程$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$为全微分方程．由上述路径无关积分结论可得：

1. $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$是全微分方程 $\Leftrightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.
2. $P=\frac{\partial U}{\partial x},Q=\frac{\partial U}{\partial y}$.
3. 全微分方程的通解为$U(x,y)=C$.

求全微分方程的通解函数U的方法：

1. 任选一条路径L进行曲线积分.
2. 定义$U_x(x,y)=\int P\ \mathrm{d}x$，则$\frac{\partial U_x}{\partial x}=P$．若$U(x,y)=U_x(x,y)+U_y(y)$，则$Q=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U_x}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}U_y}{\mathrm{d}y}$，即$U_y=\int Q-\frac{\partial U_x}{\partial y}\ \mathrm{d}y$．即：

$$U=\int P\ \mathrm{d}x+\int Q-\frac{\partial\left(\int P\ \mathrm{d}x\right)}{\partial y}\ \mathrm{d}y+C$$

3. 直接凑微分$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}U$.

> 常见全微分形式：
>
> $$y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy)$$
> $$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$
> $$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$
> $$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$
> $$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$$
> $$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

积分因子：若$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$不是全微分方程，但$\mu P\mathrm{d}x+\mu Q\mathrm{d}y=0$是全微分方程(即$\frac{\partial(\mu\cdot P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu\cdot Q)}{\partial x}$，也即$\mu_y'P+\mu P_y'=\mu_x'Q+\mu Q_x'$)，则$\mu(x,y)$为$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$的积分因子.

> 若$\mu(x,y)=\mu(x)$(即$\mu_y'=0$)，则：
>
> $$\mu_x'=\frac{P_y'-Q_x'}{Q}\mu\Rightarrow\mu=\exp\left(\int\frac{P_y'-Q_x'}{Q}\ \mathrm{d}x\right)$$
>
> 若$\mu(x,y)=\mu(y)$(即$\mu_x'=0$)，则：
>
> $$\mu_y'=\frac{P_y'-Q_x'}{-P}\mu\Rightarrow\mu=\exp\left(\int\frac{P_y'-Q_x'}{-P}\ \mathrm{d}y\right)$$
>
> 若求出积分因子，则全微分方程$\mu P\mathrm{d}x+\mu Q\mathrm{d}y=0$通解为$U(x,y)=C$也就是原方程的通解.

曲面积分

第I型曲面积分：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\ \mathrm{d}S$$

其中(与三维二重积分类似)：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}S &= \frac{1}{|\cos\gamma|}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}S &= \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}S &= \sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
\mathrm{d}S &= \|\vec{\tau}_1\times\vec{\tau}_2\|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
\mathrm{d}S &= \sqrt{EF-G^2}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

事实上，由行列式的物理意义即可得到，对于任意$\vec{\tau}_u$和$\vec{\tau}_v$确定的$\mathrm{d}S$，以及$\vec{\tau}_p$和$\vec{\tau}_q$确定的$\mathrm{d}S'$，都有：

$$\mathrm{d}S = \left|\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right|\ \mathrm{d}S'$$

特别地，对于封闭曲线记为：

$$\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\ \mathrm{d}S$$

第I型曲面积分中值定理：$f\in\mathscr{C}(\Sigma)$，Σ光滑，$\exists(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$ s.t.：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\ \mathrm{d}S = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot S(\Sigma)$$

> **Poisson公式**：
>
> $$\begin{aligned}
> \iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\ \mathrm{d}S &= 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\ \mathrm{d}u \\
> \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f(ax+by+cz)\ \mathrm{d}S &= 2\pi r\int_{-r}^{r} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\ \mathrm{d}u
> \end{aligned}$$

双侧曲面：曲面S上任意一点p_0处存在两个共线反向法向量，选定其中一个为正方向，当动点p从p_0出发沿S上任意封闭曲线回到p_0时，法向量正方向与出发时正方向相同，则S为双侧曲面.（单侧曲面例如莫比乌斯环）. 规定方向的双侧曲面为**有向曲面**.

第II型曲面积分：$\vec{F}(x,y,z)=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$，$\vec{S}=\vec{n}\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$，其中$\vec{n}$是有向曲面正方向一侧的单位法向量：

$$\iint_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma^+} X\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

其中：$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\cos\alpha\ \mathrm{d}S=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ \mathrm{d}S=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\times\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|A|}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{sgn}(A)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 另外两项同理.

注意$\iint_{\Sigma^+} X\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma^+} X\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma^+} Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\iint_{\Sigma^+} Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中的曲面积分$\iint_{\Sigma^+}$不能直接等价于二重积分$\iint$，因为第三变量在改变而非常数. 不同于曲线积分，$\iint_{\Sigma^+} f(x,y,z)\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$这种曲面积分在封闭情况下可以求解，参见下方"Gauss公式"(另外，类似于曲线积分如果被积函数和第三变量无关也可以求解).

对于闭区域V的边界曲线$\partial V=\Sigma$，一般将其正方向定义为Σ的外侧，记为Σ^+. 默认封闭曲线积分为沿正方向的积分.

> 第II型曲面积分具有方向性：

$$\iint_{\Sigma^+}\vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\iint_{\Sigma^-}\vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

事实上，$\int F\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S$也可看做是第I型曲面积分不具有方向性，但$\vec{F}\cdot(-\vec{n})=-\vec{F}\cdot\vec{n}$，故第II型曲面积分具有方向性.

$$\iint_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\pm\iint_{D}XA+YB+ZC\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中：

$$A=\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},B=\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},C=\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Gauss公式：

$V\subseteq\mathbb{R}^3$，$P,Q,R\in\mathscr{C}^{(1)}(V)$，$\partial V=\Sigma$光滑或分片光滑，则：

$$\oiint_{\Sigma^+}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

更进一步，事实上有：

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma^+}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z&=\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}\ \mathrm{d}V\\ \oiint_{\Sigma^+}Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x&=\iiint_V\frac{\partial Q}{\partial y}\ \mathrm{d}V\\ \oiint_{\Sigma^+}R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y&=\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}\ \mathrm{d}V\end{aligned}$$

注意到如果构造P,Q,R使得$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=C$为非零常数，则可用于求出$V$区域的体积.

Stokes公式：

S为光滑双侧曲面，$P,Q,R\in\mathscr{C}^{(1)}(S)$，$\partial S=L$光滑或分段光滑，则：

$$\begin{aligned}\oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z&=\iint_{S^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ &\quad+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\ &\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &=\iint_{S^+}\det\begin{bmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{bmatrix}\\ &=\iint_{S^+}\det\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{bmatrix}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

其中L^+和S^+方向满足右手法则(大拇指指向S^+正法向量方向，四指为L^+正方向).

更进一步，事实上有：

$$\begin{aligned}\oint_{L^+}P\mathrm{d}x&=\iint_{S^+}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \oint_{L^+}Q\mathrm{d}y&=\iint_{S^+}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ \oint_{L^+}R\mathrm{d}z&=\iint_{S^+}\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\end{aligned}$$

特别地，在二维特殊情况下有：

> $$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x = -\iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$
> $$\oint_{L^+} Q\mathrm{d}y = \iint_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$
>
> 与Green公式相吻合.

空间路径无关积分:
若$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$中任意一条简单封闭区县$L$可以通过连续形变收缩为一点，则称$L$为**零伦**的. L为零伦的当且仅当L为某分片光滑曲面$S \subseteq \Omega$的边界曲线.
若区域Ω内任意简单闭曲线都为零伦的，则Ω为**单连通体**.
若$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$为单连通体，$P, Q \in \mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$，$L$光滑或分段光滑，则以下命题等价:

1. $\int_{L(A,B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$路径无关.
2. $\exists U$ s.t.: $\forall (x,y,z) \in \Omega, \mathrm{d}U = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$. 即:

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

3. $\forall (x,y,z) \in \Omega, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
4. $\forall L \subseteq D$，若L为光滑或分段光滑封闭曲线，则$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$.

场论

场: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$，$\forall M \in \Omega$: 若$\exists! u = f(M)$，则$f$为$\Omega$上的**数量场**；若$\exists \vec{u} = \vec{F}(M)$，则$\vec{F}$为$\Omega$上的**向量场**.

梯度场: 若数量场U在Ω上连续可微，则$\nabla U(M) = (U_x'(M), U_y'(M), U_z'(M))$为$\Omega$上的向量场，即为$u$的梯度场. ∇又称**哈密顿算子**:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

注意U为数量场而∇U为向量场，不能写作$\nabla \cdot U$，后者中U为向量场而$\nabla \cdot U$为数量场(散度场).

> 任意连续可导数量场存在对应向量场(梯度场)，但并非所有连续向量场存在对应数量场，其存在的充要条件是势函数存在(积分路径无关).

保守场: 若向量场$\vec{F}$在Ω上积分路径无关，即$\int_{L(A,B)} \vec{F} \cdot \vec{\tau} = U(B) - U(A)$，则$\vec{F}$为$\Omega$上的保守场.

有势场: 若向量场$\vec{F}$在Ω上存在可微函数U，使得$\vec{F} = \nabla U$，则$\vec{F}$为Ω上的有势场.

> $\vec{F}$为有势场 $\Leftrightarrow$ $\vec{F}$为保守场.

散度场: 若向量场$\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$在$\Omega$上连续可微，则:

$$\mathrm{div}\vec{F} = P_x' + Q_y' + R_z' = \nabla \cdot \vec{F}$$

为Ω上的数量场，即$\vec{F}$的散度场.

通量/流量: S^+为连续可微向量场$\vec{F}$中的定向曲面，$\vec{n}$为S^+单位法向量，则$\vec{F}$通过曲面S向$\vec{n}$方向的通量/流量为:

$$\iint_{S^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$$

> 注意到根据Gauss公式，$\vec{F}$在Ω上连续可微，故：
>
> $$\oiint_{\partial\Omega^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}\ \mathrm{d}V$$
>
> 且根据积分中值定理，$\exists\xi\in\Omega$：
>
> $$\oiint_{\partial\Omega^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F}\ \mathrm{d}V = \mathrm{div}\vec{F}(\xi)\cdot V(\Omega)$$
>
> 故散度场可以定义为，对于以M为球心的球D：
>
> $$\mathrm{div}\vec{F}(M) = \lim_{V(D)\to 0}\frac{1}{V(D)}\oiint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S$$

无源场：若$\mathrm{div}\vec{F}(M)\neq 0$，称$\vec{F}$在$M$**有流源**；若$\mathrm{div}\vec{F}(M)>0$，称$\vec{F}$在$M$**有正流源**；若$\mathrm{div}\vec{F}(M)<0$，称$\vec{F}$在$M$**有负流源**．若$\forall M\in\Omega$，$\mathrm{div}\vec{F}(M)=0$，则$\vec{F}$为$\Omega$上的无源场．

旋度场：若向量场$\vec{F}(M)=(P(M),Q(M),R(M))$在$\Omega$上连续可微，则：

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{bmatrix} = \nabla\times\vec{F}$$

为Ω上的向量场，即为$\vec{F}$的旋度场．

环量/环流量：L^+为向量场$\vec{F}$中光滑或分段光滑的有向闭合曲线，$\vec{\tau}$为L^+单位切向量，则$\vec{F}$沿L^+的环量/环流量为：

$$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}\ell$$

> 注意到根据Stokes公式：
>
> $$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}\ell = \iint_{\Sigma^+} \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}\Sigma$$
>
> 且根据积分中值定理，$\exists\xi\in\Sigma^+$：
>
> $$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}\ell = \iint_{\Sigma^+} \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S = \mathrm{rot}\vec{F}(\xi)\cdot\vec{n}\cdot S(\Sigma)$$
>
> 故旋度场可以定义为，对于以M为圆心的圆D：
>
> $$\mathrm{rot}\vec{F}(M)\cdot\vec{n} = \lim_{S(D)\to 0}\frac{1}{S(D)}\oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot\vec{\tau}\ \mathrm{d}\ell$$

无旋场：故$\mathrm{rot}\vec{F}(M)\cdot\vec{n}$表示$\vec{F}$在$M$处环绕$\vec{n}$的**方向旋量**，则$\mathrm{rot}\vec{F}(M)$的三个方向分量分别表示$\vec{F}$在$M$处环绕$x,y,z$三个坐标的方向旋量．若$\|\mathrm{rot}\vec{F}(M)\|\neq 0$，则$M$为$\vec{F}$的**旋涡**，$\|\mathrm{rot}\vec{F}(M)\|$越大旋转越快．若$\forall M\in\Omega$，$\|\mathrm{rot}\vec{F}(M)\|=0$，则$\vec{F}$为$\Omega$上的无旋场．

调和场：若向量场$\vec{F}$在Ω上同时为有势场和无源场，则$\vec{F}$为Ω上的调和场．
$\vec{F}$在Ω上同时为有势场和无源场，故：

$$0=\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(\nabla U)=(\nabla\cdot\nabla)U=\Delta U$$

其中Δ为**拉普拉斯算子**：

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

注意若U为数量场则ΔU也为数量场，若U为向量场则ΔU也为向量场，不能写作$\Delta \cdot U$，后者无意义.

拉普拉斯方程：$\Delta U = 0$为拉普拉斯方程，满足次方程的解函数U称为**调和函数**.

场的联合运算：若数量场U在Ω上二阶连续可微，向量场$\vec{F}$在Ω上二阶连续可微，则：

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \vec{F} \cdot \underbrace{(\nabla \times \nabla)}_{=\vec{0}} = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}(\nabla U) = \nabla \times (\nabla U) = \underbrace{(\nabla \times \nabla)}_{=\vec{0}} U = \vec{0} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}(\nabla U) = \nabla \cdot (\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla) U = \Delta U \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathrm{div}\vec{F}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{F}) &= (\nabla \cdot \vec{F})\nabla - \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \vec{F})}_{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}} \\ &= (\nabla \cdot \vec{F})\nabla - \Big((\nabla \cdot \vec{F})\nabla - (\nabla \cdot \nabla)\vec{F}\Big) \\ &= (\nabla \cdot \nabla)\vec{F} \\ &= \Delta \vec{F} \end{aligned} \tag{4}$$

> 由(1).，旋度场均为无源场.
> 由(2).，梯度场均为无旋场.
> 由(2).，$\vec{F}$为有势场/保守场 $\Leftrightarrow$ $\vec{F}$为无旋场，即$\|\mathrm{rot}\vec{F}\| = 0$.

平面通量：L^+为连续可微向量场$\vec{F}$中的定向曲线，$\vec{n}$为L^+在平面内的单位法向量，则$\vec{F}$穿过曲线L的通量为：

$$\int_{L^+} \vec{F} \cdot \vec{n} \ \mathrm{d}\ell$$

平面环量：与空间环量一致.

平面散度与旋度：

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot \vec{n} \ \mathrm{d}\ell = \iint_D \mathrm{div}\vec{F} \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot \vec{\tau} \ \mathrm{d}\ell = \iint_D \mathrm{rot}\vec{F} \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

级数

级数：无穷项数列求和：

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

其中u_n为**通项/一般项**，若$\forall i, u_i$不含有参数变量，则该级数为**(常数项)级数**. 正项级数、负项级数、交错级数、任意项级数等都为常数项级数的特殊情况.

部分和：级数的前n项部分和为：

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$$

> 级数收敛当且仅当部分和数列收敛，且此时两者相等.
>
> $$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$

级数收敛柯西原理：又数列收敛柯西原理和级数收敛的部分和等价条件可得，级数收敛当且仅当：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,p>0$，都有：

$$|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

> S收敛 $\Rightarrow$ 通项u_n收敛至0.
> 改变S的有限项不影响S的敛散性(但收敛时会影响级数值，这与数列极限不同).

余合：$r_n=S-S_n$为级数S的第n项余和.

> 级数收敛当且仅当余和收敛至0.
>
> $$S=\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}S-S_n=S-\lim_{n\to\infty}S_n=0$$

收敛级数的运算：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛到A，级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛到B，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$0=n_0<n_1<n_2<\cdots$，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha A+\beta B$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})=A$$

> 注意新级数$\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})$收敛不保证原级数收敛(e.g.：$1,-1$交错数列). 若收敛的新级数中每一项内符号相同，则原级数收敛.

同号级数：$\forall n\geq 1,u_n\geq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**正项级数**. $\forall n\geq 1,u_n\leq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**负项级数**. 不失一般性，通常仅考虑正项级数即可.

> 正项级数的级数部分和数列S_n单调递增，故正项级数收敛当且仅当S_n.

> 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$满足$\exists N\in\mathbb{N}_+$ s.t.：$\forall n>N$，$u_n\leq cv_n$，其中$c>0$. 则：
>
> 1. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.
> 2. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

> e.g.:
> **广义调和级数/p-级数**:
>
> $$\zeta(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$
>
> 因为有:

$$\frac{1}{p-1}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x<\zeta(p)<1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{p}{p-1}$$

故由于$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$收敛当且仅当$p>1$，进而$p$-级数收敛当且仅当$p>1$.

比较判别法:
正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$满足$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$，则:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$0\le k<+\infty\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，$0<k\le+\infty\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

比阶判别法:
对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若存在p使得$\lim_{n\to\infty}n^pu_n=k$.

1. 若$p>1$，$0\le k<+\infty\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.
2. 若$p\le1$，$0<k\le+\infty\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

比值判别法:

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n$$

几何级数收敛当且仅当$|q|<1$. 故对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=c$，其中$0\le c\le+\infty$，则:

1. $c<1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.
2. $c>1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.
3. $c=1$，无法判断.

特别地，即使$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在，若存在对应上界和下界满足上述条件，也可用于判别.

根式判别法(柯西判别法):
对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=c$，其中$0\le c\le+\infty$，则:

1. $c<1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.
2. $c>1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.
3. $c=1$，无法判断.

拉贝判别法:
对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若存在μ使得$n\to\infty$时有$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+o(\frac{1}{n})$，则:

1. $\mu>1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.
2. $\mu<1\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.
3. $\mu=1$，无法判断.

积分判别法:
对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\exists f(x)\in\mathscr{C}[1,+\infty)$ s.t.: $\forall n\in\mathbb{N}_+,f(n)=u_n$且$f(x)$为单调递减非负函数，则: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛当且仅当$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛. 特别地，

$$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\le\sum_{n=1}^{\infty}u_n\le u_1+\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

u_n非负单调递减，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}2^nu_{2^n}$收敛.

> Proof:
> 记$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$，$P_n=\sum_{k=1}^{n}2^ku_{2^k}$，则:

> > $$S_{2^{n+1}-1}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1}u_j\le\sum_{k=0}^{n}2^k u_{2^k}=u_1+P_n$$
> >
> > $$S_{2^{n+1}}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}u_j\ge\sum_{k=0}^{n}2^k u_{2^{k+1}}=u_1+\frac{1}{2}P_{n+1}$$

> **莱布尼茨判别法**:
> u_n非负单调递减趋于0，则$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$必定收敛：$u_1-u_2\le S\le u_1$. 且部分和数列$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k$满足$u_{n+1}-u_{n+2}\le|S-S_n|\le u_{n+1}$. 注意莱布尼茨判别法仅仅是充分条件.

任意项级数：任意一项都可以为正项或负项的级数. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则原任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛**；若原任意项级数收敛但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$不收敛，则原任意项级数**条件收敛**.

> 定义任意项级数的正项部分$u_n^+=\max\{u_n,0\}$和负项部分$u_n^-=\max\{-u_n,0\}$. 则：
>
> 1. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$均收敛.
> 2. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$均发散(单调递增无上界).
>
> > Proof:
> > (1) $\Rightarrow$显然：$0\le u_n^+\le|u_n|$，$0\le u_n^-\le|u_n|$.
> > (1) $\Leftarrow$显然：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^++u_n^-$.
> > (2)，根据(1)，条件收敛则至少一个发散，不妨假设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$发散. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定发散，则不条件收敛.

> 绝对收敛级数满足交换律.
>
> > Proof:
> > 绝对收敛级数的正项部分级数和负项部分级数均收敛，收敛同号级数满足交换律.

> **黎曼定理**:
> 条件收敛级数必定不满足交换律：必定存在一个重排列方法使其发散；且$\forall A\in\mathbb{R}$，存在一个重排列方法使其收敛到A.
>
> > Proof:
> > 注意到条件收敛级数的正项部分级数和负项部分级数均发散.
> > $\forall M\in\mathbb{R}$，可以取$\min k_1$ s.t.: $\sum_{j=1}^{k_1}u_j^+\ge M$，再取$\max k_2$ s.t.: $\sum_{j=1}^{k_1}u_j^+-\sum_{j=1}^{k_2}u_j^-\ge M$，以此类推，故级数发散.
> > $\forall A\in\mathbb{R}$，可以取$\min k_1$ s.t.: $\sum_{j=1}^{k_1}u_j^+\ge A$，再取$\min k_2$ s.t.: $\sum_{j=1}^{k_1}u_j^+-\sum_{j=1}^{k_2}u_j^-\le A$，以此类推，故级数收敛到$A$.

级数乘法：级数乘法有两种定义：
级数对角线加法(卷积)：

$$c_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-j}$$
$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{i+j\le n+1}a_ib_j$$

方块加法(多项式乘法)：

$$c_n=\sum_{i=1}^{n}(a_ib_n+a_nb_i)$$
$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$$

> **柯西定理**：
> $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，则任意顺序相加的级数$\sum_{i,j}^{\infty}a_ib_j$均绝对收敛到级数乘法结果.
>
> > Proof:
> > 考虑绝对值方块相加部分和$P_n'=(\sum_{k=1}^{n}|a_k|)\cdot(\sum_{k=1}^{n}|b_k|)$，故其对应原级数$P_n=(\sum_{k=1}^{n}a_k)\cdot(\sum_{k=1}^{n}b_k)$绝对收敛．而绝对收敛数列满足交换律：$(\sum_{k=1}^{n}a_k)\cdot(\sum_{k=1}^{n}b_k)=\sum_{i,j}^{\infty}a_ib_j$.

> **Dirichlet判别法**:
> u_n单调递减趋于0，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$部分和有界，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.
> **Abel判别法**:
> u_n单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

函数项级数：函数$u_n(x)$定义在I上，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

$\forall\alpha\in I$，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\alpha)$收敛，则$\alpha$为**收敛点**．$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点集合为其**收敛域**$D$．若$x\in D$，则有**和函数**：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

与常数项级数类似对于$x\in D$，部分和函数有：

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

一致收敛：若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\alpha)$在区间$I$上处处收敛，部分和函数列$\{S_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛到和函数，则该函数项级数在区间$I$上一致收敛．具体地，对于部分和函数列的一致收敛：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N,x\in I$，$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$，记为$S_n(x)\overset{I}{\rightrightarrows}S(x)\quad(n\to\infty)$.

> $\{f_n(x)\}$一致收敛当且仅当$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N,x\in I$，$\forall p\geq1$，$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

> $f_n(x)\overset{I}{\rightrightarrows}f(x)$当且仅当$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$.

> 若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上有定义，$\forall n\geq1$，$f_n(x)$在a处右连续，但$\{f_n(a)\}$发散，则$\forall0<\delta<b-a$，$\{f_n(x)\}$在$(a,a+\delta)$内非一致收敛.

函数项级数一致收敛柯西原理：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛当且仅当$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n>N,x\in I$，$\forall p\in\mathbb{N}^*$，$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$.

> 若$\{u_n(x)\}$在I上非一致收敛到0，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上非一致收敛.

> 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上有定义，$\forall n \geq 1$，$u_n(x)$在$a$处右连续，但$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$发散，则$\forall 0 < \delta < b-a$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a, a+\delta)$内非一致收敛.

> **Majorant判别法**:
> $\forall n \geq 1$，$|u_n(x)|$在区间I上有定义且有上界c_n. 若$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上绝对收敛且一致收敛.
>
> **Dirichlet判别法**:
> 若$\forall x \in I$，$\{u_n(x)\}$单调且$u_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} 0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$部分和函数列一致有界(i.e.: $\exists M > 0$ s.t.: $|\sum_{k=1}^{n} v_k(x)| \leq M$)，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$在$I$上一致收敛.
>
> **Abel判别法**:
> 若$\forall x \in I$，$\{u_n(x)\}$单调且函数列$\{u_n(x)\}$在I上一致有界，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$I$上一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$在$I$上一致收敛.

> 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛到其和函数$S(x)$，且$\forall n \geq 1$，$u_n(x) \in \mathscr{C}(I)$，则$S(x) \in \mathscr{C}(I)$.

> 若$f_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} f(x)$且$\forall n \geq 1$，$f_n(x) \in \mathscr{C}(I)$，则$f(x) \in \mathscr{C}(I)$.

> 若$\forall n \geq 1$，$u_n(x) \in \mathscr{C}(I)$但$S(x) \notin \mathscr{C}(I)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上非一致收敛.

> 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛到其和函数$S(x)$，且$\forall n \geq 1$，$u_n(x) \in \mathscr{C}[a,b]$，则$S(x) \in \mathscr{R}[a,b]$且:
>
> $$\int_a^b S(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n(x)\ \mathrm{d}x$$
>
> 一般地，若$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$，且$\forall n \geq 1$，$f_n(x) \in \mathscr{C}[a,b]$，则$f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$且:
>
> $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x$$

> 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且$\forall n \geq 1$，$u_n(x) \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$，则$S(x) \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$且:
>
> $$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$
>
> 一般地，若$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$，且$\forall n \geq 1$，$f_n(x) \in \mathscr{C}^{(1)}[a,b]$，则$f^{(1)}(x) \in \mathscr{C}[a,b]$且:
>
> $$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n'(x)\ \mathrm{d}x$$

幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

> **Abel第一定理**:
> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_0 \neq 0$处收敛，则$\forall |h| < |x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[-h, h]$上绝对收敛且一致收敛.
>
> > Proof:
> > $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{h}{x_0}\right|^n$. 注意到$a_n x_0^n$趋于0故有上界$M$，根据Majorant判别法，该式$\leq M \cdot \left|\frac{h}{x_0}\right|^n$，后者为公比小于1的等比数列，故收敛. 故原级数绝对收敛且一致收敛.

> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_1 \neq 0$处发散，则$\forall |x_2| > |x_1|$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_2^n$发散.

> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_0 \neq 0$处收敛，在$x_1 \neq 0$处发散，则$\exists ! r>0$，使得$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-r,r)$内绝对收敛，在$[-r,r]$外处处发散．

收敛半径：若$\exists ! r \in [0,\infty]$ `s.t.`：$\forall |x|<r$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛，$\forall |x|>r$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散．则$r$为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径；$(-r,r)$为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间(注意收敛区间一定是开区间)．

> 幂级数的收敛域为收敛区间并上收敛的区间端点．收敛域是以原点为中心的区间．

> 对于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$r$，$\forall [a,b] \subseteq (-r,r)$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[a,b]$上绝对收敛且一致收敛．

> 若$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$或$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$r = 1/l$．特别地，$l=0$时$r=+\infty$；$l=+\infty$时$r=0$．

> **`Abel`第二定理**：
> 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$R$且在$R$(或$-R$)处收敛，则$\forall 0<r<R$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[-r,R]$(或$[-R,r]$)上一致收敛．
>
> > `Proof:`
> > $[-r,R]=[-r,0]\bigcup[0,R]$．$[-r,0]\subseteq(-R,R)$显然一致收敛，对于$[0,R]$：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \frac{x^n}{R^n}$，根据`Abel`判别法，前者与$x$无关在$[0,R]$一致收敛，后者在$[0,R]$单调递减且一致收敛，则原级数在$[0,R]$一致收敛．

> 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$r$，则：
>
> 1. $S(x) \in \mathscr{C}(-r,r)$．
> 2. 若级数在r处收敛，则$S(x) \in \mathscr{C}(-r,r]$．
> 3. 若级数在$-r$处收敛，则$S(x) \in \mathscr{C}[-r,r)$．
> 4. $\forall [a,b] \subseteq (-r,r)$，$S(x) \in \mathscr{R}[a,b]$，且：
>
> $$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (b^{n+1} - a^{n+1})$$

> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$收敛半径相同．

> 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$r$，则$S(x) \in \mathscr{C}^{(\infty)}(-r,r)$且：
>
> $$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n^{\underline{k}} a_n x^{n-k}$$
>
> (注意$S(x)$仅在收敛域上有意义)

泰勒级数：若$f(x)$在$(a-r,a+r)$内能展开成幂级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$，则$r$为该级数的收敛半径，$f(x)$为该级数的和函数，$f(x)$在$(a-r,a+r)$内存在任意阶导数且$f^{(k)}(x) = S^{(k)}(x)$．特别地，$f^{(k)}(a) = k! a_k$，故$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$唯一确定，则：

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

称右侧级数为$f(x)$在a点的泰勒级数，$f(x)$在$a=0$处的泰勒级数为$f(x)$的**麦克劳林级数**．

> $f(x)$在点a处可以展开为泰勒级数当且仅当$f(x)$在$(a-r,a+r)$内任意阶导数存在，且在$\forall x \in (a-r,a+r)$，$n\to\infty$时拉格朗日余项$R_n(x)$趋近于0．
>
> $$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$
>
> 注意到一个充分条件为：$f(x)$在$(a-r,a+r)$内各阶导数一致有界，则：

$$\lim_{n\to\infty}|R_n| \le \lim_{n\to\infty}\frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!} = M\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

e.g.:

$$\begin{aligned}
e^x &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \\
\sin x &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
\cos x &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \\
\ln(1+x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n & x\in(-1,1] \\
(1+x)^\alpha &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!}x^n & x\in\begin{cases}(-1,1) & \alpha\le -1\\ (-1,1] & -1<\alpha<0\\ [-1,1] & \alpha>0\end{cases} \\
\arcsin x &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1} & x\in[-1,1] \\
\arctan x &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} & x\in[-1,1]
\end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \\
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \\
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

三角函数系：$\forall m,n\in\mathbb{N}^+$：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin((n+m)x)+\sin((n-m)x)\ \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\ \mathrm{d}x = \pi[m=n]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\ \mathrm{d}x = \pi[m=n]$$

故$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\}$为**标准正交三角函数系**：即任意不同的二者内积为0，相同的内积为1.

Fourier级数：设$f(x)\in\mathscr{R}[-\pi,\pi]$，则存在**Fourier系数**$\{a_n\}_{n=0}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t.：$f(x)$的Fourier级数为：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \qquad (x\in[-\pi,\pi])$$

若Fourier级数收敛则可记为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \qquad (x\in[-\pi,\pi])$$

> 对等式两侧同时乘$\cos nx$并积分，可得：
>
> $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x$$
>
> 对等式两侧同时乘$\sin nx$并积分，可得：
>
> $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x$$

> **Dirichlet收敛定理**：
> 若$f(x)$在$[a,b]$上有界，且存在分割$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$使得在任意区间$(x_{k-1}, x_k)$上$f(x)$单调，则称$f(x)$分段单调．若$f(x)$以$2\pi$为周期，在$[-\pi,\pi]$分段单调有界，则$f(x)$的Fourier级数在$\mathbb{R}$上收敛，其在$x$处的展开收敛到：
>
> $$\frac{1}{2}\Big(f_+(x) + f_-(x)\Big)$$

> 若$f(x)$为奇函数，则$a_n = 0$；若$f(x)$为偶函数，则$b_n = 0$．

> 若$f(x)$周期为$2l$，则可将$\varphi(y) = f(\frac{l}{\pi}y) = f(x)$展开为Fourier级数．故：
>
> $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$
>
> $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x$$
>
> $$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\ \mathrm{d}x$$

三角多项式：对于$\mathbb{R}$上的$\{c_k\}_{k=0}^n, \{d_k\}_{k=1}^n$，若$c_n d_n \neq 0$，则有$n$阶三角多项式：

$$T_n(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k\cos(kx) + d_k\sin(kx)$$

> 若$f(x) \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$以$2\pi$为周期，则其Fourier级数的$n$阶部分和$S_n(f,x)$为一个阶数$\leq n$的三角多项式，而且该三角多项式最小化方均误差：
>
> $$S_n(f,x) = \underset{T_k(x), k\leq n}{\arg\min}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_k(x))^2\ \mathrm{d}x$$
>
>> Proof:
>> $\forall T_k(x)$ s.t.: $k \leq n$:
>>
>> $$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_k(x))^2\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) + T_k^2(x)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_k(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c_0^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + d_k^2\right) - \left(\frac{1}{2}a_0c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_ka_k + d_kb_k\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a_0-c_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2 + (d_k-b_k)^2\right)}_{\geq 0} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(f,x))^2\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

第一逼近定理:
$\forall f(x) \in \mathscr{C}[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 多项式 $p(x)$ s.t.: $\forall x \in [a,b], |f(x)-p(x)| < \varepsilon$.

第二逼近定理:
$\forall f(x)$连续且周期为2π, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 三角多项式 $q(x)$ s.t.: $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)-q(x)| < \varepsilon$.

Lebesgue可积函数逼近定理:
$\forall f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g(x) \in \mathscr{C}[a,b]$ s.t.: $\int_a^b (f(x)-g(x))^2 \,\mathrm{d}x < \varepsilon$.

由上述定理可进一步得到推论:
$\forall f(x)$可积且周期为2π, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 三角多项式 $q(x)$ s.t.: $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)-q(x))^2 \,\mathrm{d}x < \varepsilon$.

Bessel不等式: 若$f(x) \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$以$2\pi$为周期，则$\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

Parseval等式: 若$f(x) \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$以$2\pi$为周期，则:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

更一般地，若$f(x), g(x) \in \mathscr{R}[-\pi,\pi]$以$2\pi$为周期，则:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a_0c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_kc_k + b_kd_k$$

Riemann-Lebesgue引理:
$f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$, 则:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x) \,\mathrm{d}x = 0$$
$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x) \,\mathrm{d}x = 0$$

故若$f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$, 则$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
更进一步，若$f'(x) \in \mathscr{R}[a,b]$且$f(-\pi) = f(\pi)$, 则$a_n = o(\frac{1}{n}), b_n = o(\frac{1}{n})$. 这是因为$a_n = \frac{1}{n}b'_n, b_n = -\frac{1}{n}a'_n$.

复谐振动:

$$x = Ce^{i\omega t} = re^{i(\theta+\omega t)} = r(\cos(\theta+\omega t) + i\sin(\theta+\omega t))$$

其中$C = re^{i\theta}$为**复振幅**, $|C|$为**振幅**, θ为**初相**, $\omega \in \mathbb{R}$为**圆频率**.

复数形式Fourier级数:
设$f(t) \in \mathscr{R}[-l,l]$周期为$2l$, 令$\omega = \pi/l$, 则其Fourier级数可以写成:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\\
&\sim \frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^{in\omega t}+e^{-in\omega t})+b_n(ie^{-in\omega t}-ie^{in\omega t})\\
&\sim \frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)e^{in\omega t}+(a_n+ib_n)e^{-in\omega t}\\
&\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}
\end{aligned}
$$

其中$c_0=a_0/2$，$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$，$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}=\overline{c_k}$（$k>0$），则有：

$$
c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-ik\omega t}\ \mathrm{d}t \qquad (k\in\mathbb{Z})
$$

复值函数内积：若$f(x),g(x)$为$[-l,l]$上可积实变复值函数，其内积为：

$$
\langle f,g\rangle=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\overline{g(t)}\ \mathrm{d}t
$$

> $\{e^{ik\omega t}|k\in\mathbb{Z}\}$为标准正交函数系.

> $$
> f(t)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,e^{ik\omega t}\rangle e^{ik\omega t}
> $$

Fourier积分：$f(t)\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$为非周期函数，$f_l(t)$为$f(t)$定义在$[-l,l]$上的部分延拓产生的周期为$2l$的周期函数(i.e.：$f(t+2l)=f(t)$)．若$f$在任意有限区间上分段单调，则$f$可以展开成Fourier级数，则：

$$
\begin{aligned}
f_l(t)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,e^{ik\omega t}\rangle e^{i\omega_k t}\\
&=\frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(u)e^{ik\omega(t-u)}\ \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

考虑构造连续实变量$\omega_k=k\omega$．则$\frac{1}{2l}=\frac{1}{2\pi}(\omega_k-\omega_{k-1})=\frac{1}{2\pi}\Delta\omega_k$．那么：

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\lim_{l\to+\infty} f_l(t)\\
&=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta\omega_k\cdot\int_{-l}^{l} f(u)e^{ik\omega(t-u)}\ \mathrm{d}u\\
&=\lim_{\Delta\omega_k=\frac{\pi}{l}\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta\omega_k\cdot\int_{-l}^{l} f(u)e^{i\omega_k(t-u)}\ \mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{i\omega_\omega(t-u)}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}\omega\\
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{i\omega(t-u)}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

若f在$\mathbb{R}$上绝对可积且在t处连续，则上述积分式为$f(t)$的**Fourier积分**.

Fourier变换：根据Fourier积分可以定义含参积分：

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,\mathrm{d}u \\
f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

$\hat{f}$为f的**Fourier变换**，f为$\hat{f}$的**Fourier逆变换**.

> 特别地，由于$e^{i\omega u}=\cos(\omega u)+i\sin(\omega u)$，而$\sin(\omega u)$为关于原点的奇函数，积分为$0$，故也可写作：
>
> $$
> \begin{aligned}
> \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\omega u)\,\mathrm{d}u \\
> f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\omega
> \end{aligned}
> $$

> **离散Fourier变换**：
> 若f以2π为周期，则：
>
> $$
> \begin{aligned}
> \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-inu}\,\mathrm{d}u \\
> f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{int}
> \end{aligned}
> $$

> f,g在$\mathbb{R}$上绝对可积，则：
>
> $$\widehat{\alpha f+\beta g}=\alpha\hat{f}(t)+\beta\hat{g}$$

> $f(x),f'(x)$在$\mathbb{R}$上绝对可积且$\lim_{t\to\infty}f(t)=0$，则：
>
> $$\hat{f}'(x)=(ix)\hat{f}(x)$$
>
> 更进一步，若$\forall k\in\mathbb{N}$，$f^{(k)}$在$\mathbb{R}$绝对可积且$\lim_{t\to\infty}f^{(k)}(t)=0$，则：
>
> $$\hat{f}^{(k)}(x)=(ix)^k\hat{f}(x)$$

> f,g满足常系数微分方程$g(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kf^{(k)}(t)$，则：
>
> $$\hat{f}=\frac{\hat{g}}{\sum_{k=0}^{n}a_k(it)^k}$$

卷积：

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u$$

> f,g在$\mathbb{R}$上绝对可积，则：
>
> $$\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g}$$

> f,g,h满足卷积方程$f=g+h*f$，则：
>
> $$\hat{f}=\frac{\hat{g}}{1-\hat{h}}$$